

1. Dodatek – regresja liniowa

1.1. Wykorzystanie programu Excel do analizy wyników doświadczalnych z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów

Metodę najmniejszych kwadratów omówimy na przykładzie hipotetycznego doświadczenia, polegającego na wyznaczeniu liniowego współczynnika rozszerzalności cieplnej. Ogrzewamy metalowy pręt i mierzymy jego długość dla kolejnych temperatur. Długość pręta zmienia się zgodnie z zależnością:

$$l = l_0(1 + \alpha\Delta t) = l_0 + l_0\alpha\Delta t ,$$

gdzie l_0 jest długością pręta w temperaturze 0°C , α - współczynnikiem rozszerzalności liniowej a $\Delta t = t - 0^\circ\text{C}$ jest różnicą temperatury. Długość pręta jest liniową funkcją temperatury, czyli spełnia równanie w postaci:

$$y = b + ax ,$$

a więc współczynniki prostej są równe:

$$b = l_0, \quad a = l_0\alpha .$$

Jednym z programów pozwalających na wyliczenie tych współczynników jest Excel, a dokładnie funkcja statystyczna REGLINP, która wylicza wartości tych współczynników wraz z ich niepewnościami wykorzystując metodę najmniejszych kwadratów. Omówimy teraz dokładnie procedurę wykorzystania tej funkcji.

Krok 1.

Wprowadź dane do arkusza kalkulacyjnego. Są nimi temperatura i odpowiadająca jej długość pręta (w moim przykładzie komórki A3:B22).

Krok 2.

Zaznacz kursorem puste komórki arkusza (np. D3:E5 – dwie kolumny, trzy wiersze – obok komórek z danymi pomiarowymi) i kliknij przycisk z napisem „fx”, który służy do uruchomienia okna dialogowego wyboru odpowiedniej funkcji. Znajduje się on obok paska formuły. Ze zbioru funkcji statystycznych wybierz funkcję REGLINP i po otwarciu okna dialogowego wypełnij je w sposób pokazany na rysunku.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E
3	50	50,043		PRAWDA	50,01909
4	100	50,156		1,58E-05	0,00947
5	150	50,260		0,997876	0,020385
6	200	50,331			
7	250	50,392			
8	300	50,472			
9	350	50,557			
10	400	50,605			
11	450	50,656			
12	500	50,732			
13	550	50,804			
14	600	50,883			
15	650	50,986			
16	700	51,048			
17	750	51,102			
18	800	51,176			
19	850	51,233			
20	900	51,330			
21	950	51,384			
22	1000	51,497			

The REGLINP dialog box shows the following arguments:

- Znane_y: B3:B22
- Znane_x: A3:A22
- Stała: logiczne
- Statystyka: PRAWDA

The formula bar contains: `=REGLINP(B3:B22;A3:A22;;PRAWDA)`

Krok 3.

Zatwierdź wprowadzone dane używając klawiszy Ctrl+Shift+Enter. Wówczas zostaną automatycznie wypełnione zaznaczone wcześniej pola (D3:E5). **Nie zatwierdzaj przyciskiem OK**, ponieważ wtedy zostałyby wypełnione tylko jedno pole. W zaznaczonych polach otrzymujesz informację o:

Pole	Opis
D3	Współczynnik kierunkowy prostej - a
D4	Niepewność współczynnika kierunkowego - $u(a)$
E3	Punkt przecięcia z osią y - b
E4	Niepewność wyznaczenia punktu przecięcia - $u(b)$
D5	Współczynnik korelacji określający jakość dopasowania
E5	Standardowy błąd oceny y (niewykorzystywany w I pracowni)

	A	B	C	D	E
1					
2	Temp. t	Długość, l			
3	50	50,043		0,001454	50,01909
4	100	50,156		1,58E-05	0,00947
5	150	50,260		0,997876	0,020385
6	200	50,331			
7	250	50,392			
8	300	50,472			
9	350	50,557			
10	400	50,605			
11	450	50,656			
12	500	50,732			
13	550	50,804			
14	600	50,883			
15	650	50,986			
16	700	51,048			
17	750	51,102			
18	800	51,176			
19	850	51,233			
20	900	51,330			
21	950	51,384			
22	1000	51,497			
23					

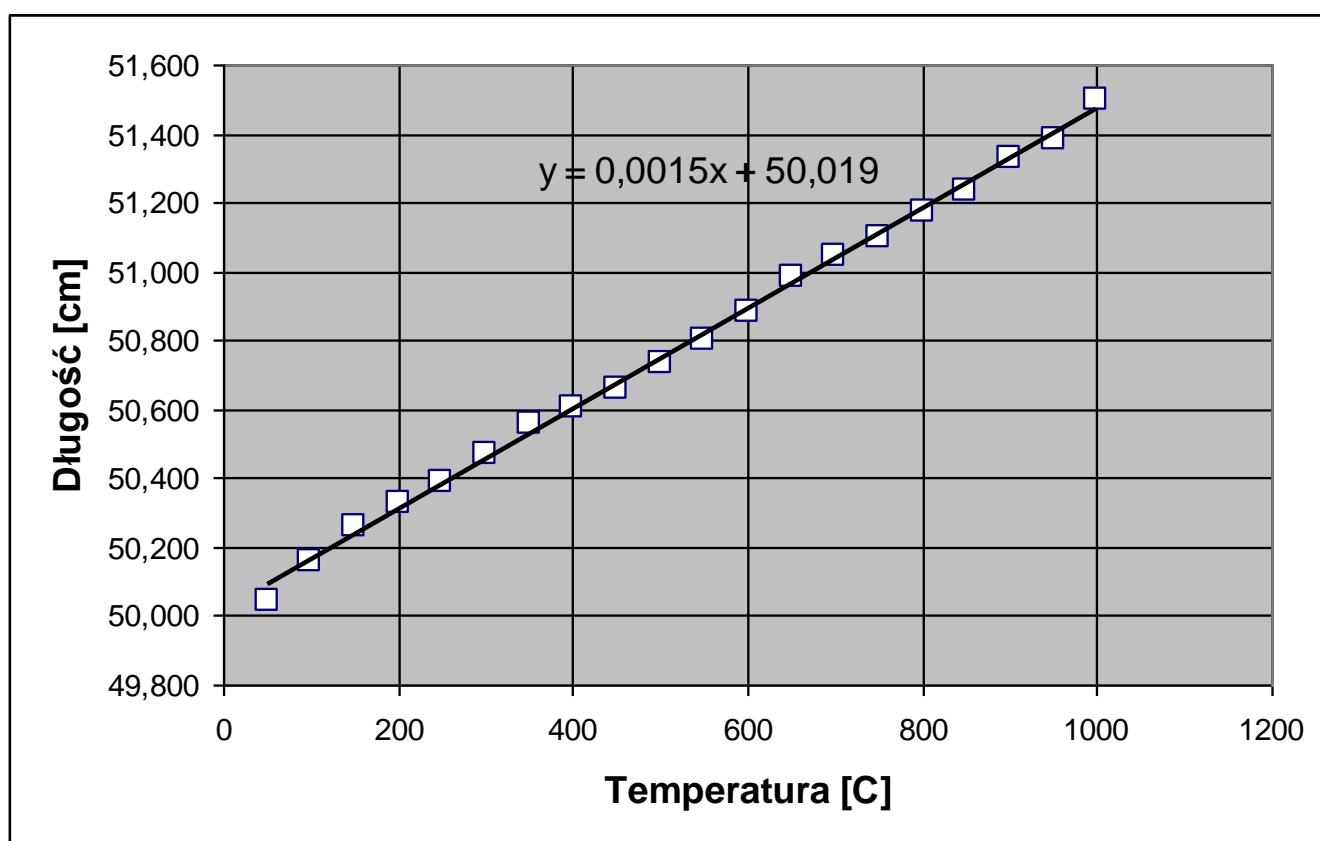
Krok 4.

W celu narysowania wykresu zaznacz komórki z danymi (A3:B22). Następnie kliknij na przycisk „polecane wykresy” (znajduje się on na wstążce „Wstawianie” – office 2016). W wyświetlonym oknie wybierz

„wszystkie wykresy” i następnie z listy dostępnych typów wykresów wybierz „punktowy”. Kliknij przycisk „OK”

Krok 5.

Kliknij na wykresie wtedy w menu głównym programu Excel pojawi się pozycja „Narzędzia wykresów” - „Projektowanie”. Na wstążce znajdź przycisk „Dodaj element wykresu” i wybierz - „Linia trendu”. Z dostępnych typów wybierz „Więcej opcji linii trendu”. W wyświetlonym panelu wybierz „wyświetl równanie na wykresie”. Zatwierdź przyciskiem „OK”. Otrzymujemy wykres w postaci przedstawionej na rysunku.



Na podstawie otrzymanych w komórka (D3:E5) wartości zapiszemy:

$$a = 145,4 \cdot 10^{-5} \frac{\text{cm}}{^{\circ}\text{C}} \quad u(a) = 1,58 \cdot 10^{-5} \frac{\text{cm}}{^{\circ}\text{C}}$$

$$b = 50,0191 \text{cm} = l_0 \quad u(b) = 0,0095 \text{cm} = u(l_0)$$

$$\alpha = \frac{a}{l_0} = \frac{145,4 \cdot 10^{-5}}{50,0191} \approx 2,907 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$$

$$\begin{aligned}
u(\alpha) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} u(a)\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial l_0} u(l_0)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{u(a)}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{-a}{l_0^2} u(l_0)\right)^2} = \\
&= \sqrt{\left(\frac{1,58 \cdot 10^{-5}}{50,0191}\right)^2 + \left(\frac{145,4 \cdot 10^{-5}}{50,0191^2} \cdot 0,0095\right)^2} \approx 0,032 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}
\end{aligned}$$

$$\alpha = (2,907 \pm 0,032) \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$$